

Alice et le Pendule : au pays des variables actions-angles

1. Prologue

Depuis les travaux de Newton (1643–1727), la Mécanique n’a cessé de se réinventer : reformulée en particulier par Lagrange (1736–1813) puis Hamilton (1805–1865), elle offre aujourd’hui des outils conceptuels et mathématiques permettant l’exploration des systèmes dynamiques les plus complexes. Nous invitons le lecteur à découvrir ces différentes formulations au travers du pendule de Foucault, un dispositif dont l’apparente simplicité est une porte ouverte sur les ramifications les plus contemporaines de la Mécanique classique. Notre discussion est inspirée de l’ouvrage « Classical Dynamics: A Contemporary approach » (J.V. José & E.J. Saletan, Cambridge University Press, 1998), duquel nous extrayons les concepts-clés tout en limitant les développements mathématiques associés. Le pendule de Foucault installé dans la collégiale Sainte-Waudru nous permettra d’estimer numériquement les différentes quantités introduites. Les grandeurs chiffrées seront données avec trois chiffres significatifs.

Une adaptation d’extraits d’« Alice au Pays des Merveilles » (L. Carrol, 1865, trad. H. Bué) offrira au lecteur quelques respirations poétiques. Les phrases entre crochets sont des ajouts au texte original.

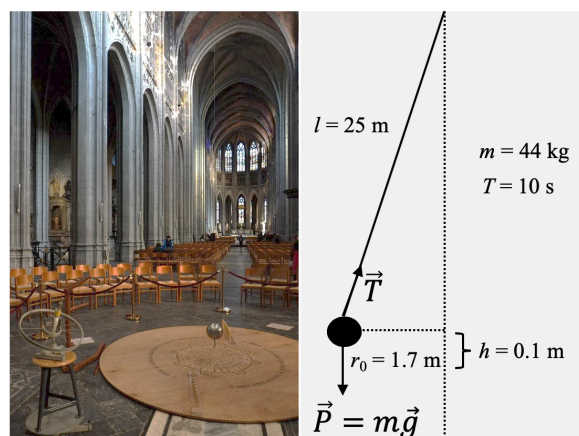


Figure 1. À gauche : Le pendule de Foucault installé dans la nef de la collégiale Sainte-Waudru. À droite : Une vue schématique de sa disposition au moment du lancer. La constante l est la longueur du pendule, depuis le point d’attache jusqu’au centre de gravité de la masse m . Au lancer, le pendule est écarté d’une distance horizontale r_0 par rapport à la verticale, soulevant la masse d’une hauteur h par rapport à sa position d’équilibre. Une fois en mouvement, le pendule oscille avec une période T . Les vecteurs \vec{P} et \vec{T} représentent le poids de la masse et la tension du câble respectivement.

2. Le Pendule et la Terre

Alice, assise auprès de sa sœur sur le gazon, commençait à s’ennuyer de rester là à ne rien faire ; une ou deux fois elle avait jeté les yeux sur le livre que lisait sa sœur [: « Le pendule de Foucault dans les différentes formulations de la Mécanique »] ; mais quoi ! pas d’images, pas de dialogues ! « La belle avance, » pensait Alice, « qu’un livre sans images, sans causeries ! ». [Un Lapin blanc passe soudain près d’Alice.] (...) Un instant après, Alice était à la poursuite du Lapin dans le terrier, sans songer comment elle en sortirait. Pendant un bout de chemin le trou allait tout droit comme un tunnel, puis tout à coup il plongeait perpendiculairement d’une façon si brusque qu’Alice se sentit tomber. (...) Tombe, tombe, tombe ! « Cette chute n’en finira donc pas ! Je suis curieuse de savoir combien de milles j’ai déjà faits, » dit-elle tout haut.

Le pendule simple est un dispositif aisé à concevoir : il s’agit d’attacher une masse m au bout d’un câble rigide dont la masse est négligeable par rapport à m . On peut dès lors considérer que la dynamique du pendule est régie par l’équation de Newton $\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$, les vecteurs \vec{P} et \vec{T} représentant le poids de la masse et la tension du câble respectivement, et \vec{a} étant l’accélération de la masse. Une représentation schématique d’un pendule simple est donnée dans la Figure 1 et particularisée au pendule installé dans la collégiale Sainte-

Waudru. La résolution de l'équation de Newton révèle que le pendule simple, une fois écarté faiblement de sa position d'équilibre ($r_0 \ll l$), effectue un mouvement périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, où $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La période est donc indépendante à la fois de la masse du pendule et de son amplitude r_0 . L'amplitude intervient toutefois dans l'énergie totale du pendule, E , qui peut s'exprimer comme l'énergie potentielle de la masse au moment du lancer : $E = mgh$. Dans le cas du pendule de Sainte-Waudru, on peut calculer que $\omega = 0.626 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $T = 10 \text{ s}$, et $E = 25 \text{ J}$. En toute rigueur, des forces de frottement doivent s'ajouter à la modélisation ; elles seront négligées ici. Les frottements dissipent l'énergie du système : ils n'influencent pas la période mais uniquement l'amplitude du pendule. Or, seul le caractère périodique de la dynamique pendulaire est pertinent pour la suite de cette discussion.

« Je dois être bien près du centre de la terre. Voyons donc, cela serait à quatre mille milles de profondeur, il me semble. » « Oui, c'est bien à peu près cela ; mais alors à quel degré de latitude ou de longitude est-ce que je me trouve ? » (Alice n'avait pas la moindre idée de ce que voulait dire latitude ou longitude, mais ces grands mots lui paraissaient beaux et sonores.)

Malgré l'amortissement dû aux forces de frottements, le pendule de Foucault peut osciller dans la nef de manière perceptible sur des durées de l'ordre d'une heure. C'est bien assez pour réaliser... que la Terre tourne ! La surface de la Terre tourne avec une vitesse angulaire de $\Omega_E = 1 \frac{\text{tour}}{\text{jour}} = 4.17 \cdot 10^{-3} \frac{\circ}{\text{s}}$ par rapport à une sphère imaginaire fixe (relativement aux astres lointains) S_i de même rayon et de même centre que celui de la Terre. Par rapport à S_i par contre, le plan d'oscillation du pendule est fixe : comme le montre la Mécanique de Newton, la force subie par le pendule étant toujours dirigée vers le centre de la Terre, le mouvement du pendule se déroule nécessairement dans un plan dont l'orientation ne peut changer. Comme illustré dans la Figure 2, cette invariance se manifeste par une rotation apparente du plan d'oscillation dans le référentiel local. Seule la composante verticale de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_E$ dans le repère local engendre cette rotation : elle vaut en norme $\Omega = \Omega_E \sin \varphi$. Dans notre cas, puisque la latitude de Mons est de $\varphi = 50.5^\circ$, la vitesse angulaire de la rotation du plan vaut $\Omega = 0.772 \frac{\text{tour}}{\text{jour}} = 5.62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

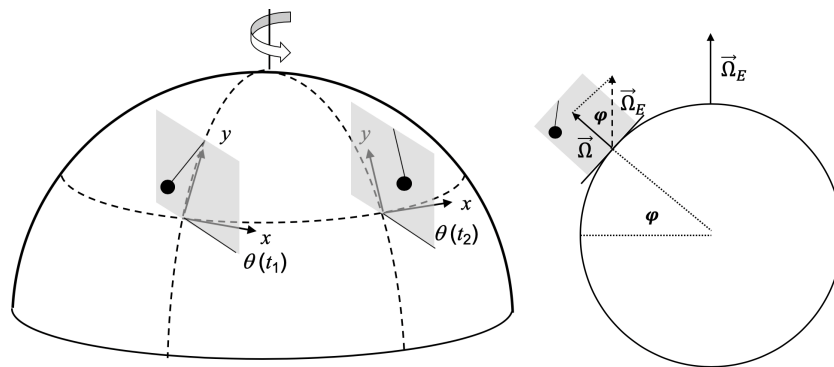


Figure 2. À gauche : vue du pendule de Foucault depuis un référentiel inertiel fixe. La variation de l'angle θ entre le plan d'oscillation du pendule et l'axe x du repère local (x, y) est illustrée à deux instants t_1 et t_2 . À droite : vue en coupe de la Terre et du pendule de Foucault. La latitude de la verticale du pendule, φ , est indiquée, ainsi que la vitesse angulaire de la Terre ($\vec{\Omega}_E$) et celle du plan d'oscillation du pendule ($\vec{\Omega}$).

L'équation de Newton mène in fine à la trajectoire $r(t) = \sqrt{\cos^2(\omega t) + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t)}$. L'angle $\theta(t)$ peut également s'obtenir au départ de $r(t)$. La trajectoire est une courbe appelée hypocycloïde (Figure 3). On peut remarquer et démontrer que le pendule ne passe jamais par la verticale ($r = 0$) : il existe un rayon minimal $r_{\min} = \frac{\Omega}{\omega} r_0$, dont l'origine est la rotation de la Terre. Observer ce rayon minimal n'est cependant pas chose aisée : à Sainte-Waudru par exemple, il ne vaut que 0.153 mm ! Une autre piste est plus prometteuse : il apparaît que θ se déplace d'une quantité $\Delta\theta = \Omega T$ au cours d'une période, soit

0.0322°. Cela reste très faible, mais il suffit d'attendre : en 10 minutes, l'angle de déviation sera de 1.93°, ce qui correspond à un déplacement parfaitement observable de 5.73 cm sur un cercle de 1.7 m de rayon.

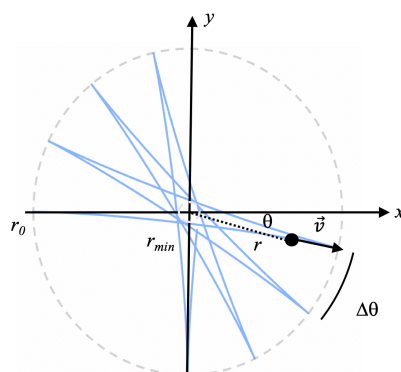


Figure 3 : Hypocycloïde représentant la trajectoire du pendule de Foucault dans le plan horizontal (le pendule est donc vu du dessus). On repère la position du pendule par les coordonnées polaires (r, θ) ; son mouvement vertical est négligeable. L'angle de déviation $\Delta\theta$ est une conséquence de la rotation de la Terre. Un vecteur vitesse instantané \vec{v} est également représenté.

3. Parallèle !

Quand tout à coup, pouf ! la voilâ étendue sur un tas de fagots et de feuilles sèches, — et elle a fini de tomber. Alice ne s'était pas fait le moindre mal. Vite elle se remet sur ses pieds et regarde en l'air ; mais tout est noir là-haut. Elle voit devant elle un long passage et le Lapin Blanc qui court à toutes jambes. [Elle le suivit jusqu'à la demeure du Chapelier ; après de brèves salutations, tous trois devisèrent de cette curieuse hypocycloïde, et Alice s'étonna de la fixité du plan d'oscillation.]. « Ah ! qui est-ce qui se permet de faire des observations ? » demanda le Chapelier d'un air triomphant.

Le pendule de Foucault illustre un important concept géométrique appelé « transport parallèle », notion par ailleurs omniprésente dans la théorie de la Relativité générale d'Einstein (1879-1955). La vitesse de la masse m du pendule dans le plan (r, θ) tangent à la Terre est un vecteur, avec une norme et une direction. Comme toute vitesse elle représente un déplacement instantané le long d'une courbe : ici, l'hypocycloïde montrée dans la Figure 3. Parler de la rotation apparente du plan d'oscillation du pendule dans le référentiel de la collégiale de Sainte-Waudru revient donc à se demander comment varie la direction du vecteur vitesse de la masse m . Cette simple question cache une difficulté insoupçonnée : s'il est vrai que dans l'espace euclidien de la Mécanique newtonienne on peut comparer deux vecteurs en différents points de l'espace en les faisant glisser parallèlement à eux-mêmes pour les ramener au même point¹, il n'est en général pas possible, dans un espace plus compliqué, de comparer des vecteurs en différents points. Or, l'espace sur lequel le plan (r, θ) est posé n'est autre que la surface de la Terre, une sphère et pas simplement un plan. Comme on peut s'en convaincre en observant la Figure 2, le plan local tangent à la Terre en un instant t_1 n'est pas le plan tangent à la Terre à l'instant $t_2 = t_1 + \delta t$. Par rapport à la sphère inertielle S_i , les deux plans ne sont pas tangents au même point !

Pour pouvoir répondre à la question « comment comparer des vecteurs en différents points d'une sphère ? », le mathématicien italien Tullio Levi-Civita (1873 – 1941) imagina une méthode valable pour des surfaces générales, donc pour le cas de la sphère. Pour transporter un vecteur \vec{V}_P d'un point P à un autre point Q de S_i , Levi-Civita proposa de plonger ladite surface dans l'espace euclidien de dimension 3 et de déplacer le vecteur \vec{V}_P de son point initial P au point voisin Q en utilisant la notion euclidienne du déplacement parallèle dans l'espace euclidien, cette notion même de « glissement » utilisée par nos écoliers en mécanique newtonienne. Le vecteur résultant, appelons-le \vec{V}_Q , n'est en général pas tangent à la sphère S_i . Levi-Civita proposa simplement de le projeter sur la surface de la sphère, pour obtenir ainsi un vecteur en Q noté \tilde{V}_Q . En repartant de ce nouveau vecteur et en procédant de manière analogue, de proche en

¹ C'est ce que nos écoliers doivent faire pour calculer la résultante des forces appliquées en différents points d'un solide en faisant glisser ces vecteurs afin qu'ils partent tous de son centre de masse.

proche pour tous les points situés le long d'une courbe passant par P et Q, on construit toute une famille de vecteurs tangents à la sphère S_i le long de la courbe considérée. Pour notre pendule de Foucault, la courbe pertinente est un cercle parallèle à l'équateur, de latitude 50.5° . Cette construction est illustrée dans la Figure 4.

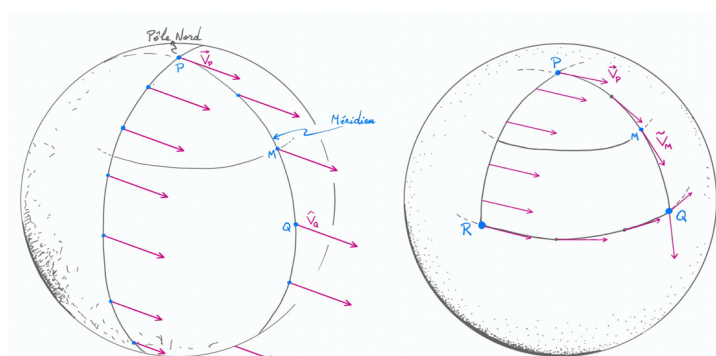


Figure 4. À gauche : Transport parallèle du vecteur \vec{V}_P le long de deux méridiens, calculé par rapport à l'espace euclidien à 3 dimensions. À droite : Transport parallèle du vecteur \vec{V}_P , sur la sphère, calculé au sens de Levi-Civita, pour les courbes PRQ et PQ.

La notion de déplacement parallèle d'un vecteur doit se faire en rapport avec une certaine *courbe* qui relie les points P et Q. Sans spécification de cette courbe, l'opération de transport parallèle est ambiguë. Il est intéressant de voir ce qui se produit pour deux courbes différentes qui relient les points P et Q sur la surface de la Terre. Prenons les courbes PQ et PRQ de la Figure 4. Selon que l'on suive la première ou la deuxième courbe, le vecteur \vec{V}_Q obtenu par transport parallèle pointerait vers le Sud ou bien sera tangent à l'équateur, donc orthogonal au précédent. On obtient bien deux vecteurs différents, orthogonaux. Le transport parallèle le long de toutes les courbes qui partent d'un point pour retourner au même point donne des vecteurs au point d'arrivée qui diffèrent du vecteur initial par une rotation d'un angle arbitraire : cela se traduit, dans le jargon des mathématiciens, en disant que le groupe d'holonomie de la 2-sphère est le groupe des rotations autour d'un axe.

Dans le cas du pendule de Foucault, la courbe d'intérêt est le parallèle passant par Mons. Le transport parallèle de la vitesse de la masse m engendre une rotation apparente de sa direction pour un observateur local. Cette rotation est mesurable au travers du déplacement du plan d'oscillation du pendule

[Alice était toujours préoccupée par l'évolution temporelle du pendule] « Si vous connaissiez le Temps aussi bien que moi, » dit le Chapelier, « vous ne parleriez pas de le gaspiller. On ne gaspille pas quelqu'un. » « Je ne vous comprends pas, » dit Alice. « Je le crois bien, » répondit le Chapelier, en secouant la tête avec mépris ; « je parie que vous n'avez jamais parlé au Temps. » « Cela se peut bien, » répliqua prudemment Alice, « mais je l'ai souvent mal employé. »

4. Lagrange

Un pas conceptuel immense dans la compréhension des phénomènes physiques a été franchi par Joseph-Louis Lagrange. Il a trouvé une formulation de la Mécanique qui permet de s'affranchir des dessins compliqués demandés à nos élèves du secondaire (Figure 1) afin de résoudre un problème de Mécanique : identifier les différentes forces en jeu, trouver leur résultante, résoudre les équations de Newton. Contrairement à ce dernier qui s'efforçait de présenter ses résultats sous la forme la plus antique possible, comme Euclide l'aurait aimée, Lagrange a compris l'importance de ne plus devoir faire des « dessins inspirés » pour avoir une chance de résoudre un problème de Mécanique. De plus, si les équations de Newton sont simples dans les coordonnées cartésiennes, elles deviennent beaucoup plus compliquées dans d'autres systèmes de coordonnées mieux adaptés à la géométrie du système dynamique étudié. Par exemple, le pendule de Foucault se modélise naturellement en coordonnées polaires (Figure 3).

En invoquant un « principe de moindre action », Lagrange a remplacé l'arsenal technique de Newton par la recherche d'une seule fonction, appelée après lui *lagrangien* et notée L . Typiquement, $L =$

$E_c - E_p$, soit la différence entre les énergies cinétique et potentielle du système étudié. Le postulat de Lagrange est que le système dynamique, lors de son évolution temporelle entre deux instants t_i et t_f , va toujours rendre minimale la quantité appelée *action*, $S = \int_{t_i}^{t_f} L dt$. Le lagrangien peut s'écrire dans n'importe quelles coordonnées et le nombre réel qu'il fournit pour un état donné du système sera toujours le même, indépendamment des coordonnées utilisées ! Par exemple le Lagrangien du pendule de Foucault est de la forme $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} + \Omega)^2) - \frac{m}{2} \omega^2 r^2$, où $(\dot{r}, \dot{\theta})$ sont les vitesses associées à (r, θ) – le symbole \dot{f} désigne la dérivée de f par rapport au temps. L'espace paramétré par les variables de Lagrange (r, θ) est appelé *espace des configurations*.

Le principe de moindre action est obéi par tous les systèmes physiques. De ce principe, Lagrange déduit des équations du mouvement qui prennent la même forme dans tous les systèmes de coordonnées et se réduisent aux équations de Newton si on choisit les coordonnées cartésiennes : $\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0$ où q_a sont les coordonnées de position. Mais ce n'est pas tout. Le formalisme analytique de Lagrange permet aussi de négliger l'énorme majorité des forces en jeu, comme par exemple la tension dans le câble du pendule de Foucault, pour ne retenir que la force de gravité. Peu importe donc de connaître les tensions et contraintes imposées au corps solide dont on étudie le mouvement, tout ce qui compte c'est de savoir que ce corps reste solide et soumis à des contraintes extérieures comme la constance de la longueur l du câble. Bien entendu, si l'on s'intéresse à la tension dans le câble en chaque instant, le formalisme de Lagrange permet de l'obtenir, mais l'important est qu'il n'est pas nécessaire de la connaître explicitement pour résoudre les équations de Lagrange et obtenir la dynamique $r(t)$.

5. De la Terre à l'espace des phases

Le choix d'un bon système de coordonnées reflète les *symétries* du système étudié. Hamilton a recherché davantage de symétrie encore en ne limitant pas la visualisation d'un système aux seules variables de position. Il instaure dans son formalisme, dès le départ, cette idée fondamentale : les variables de position et de vitesse sont indépendantes. Elles peuvent dès lors être choisies indépendamment en chaque instant et les équations de la dynamique « propagent » ces conditions initiales dans le futur. Hamilton a défini des variables appelées « moment » ou « impulsion », $P_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$, généralisant les vitesses (une pour chaque coordonnée de position) et a ensuite construit, pour chaque lagrangien L , une nouvelle fonction $H = P_a \dot{q}_a - L$ appelée « hamiltonien ».

Le hamiltonien pour le pendule de Foucault est de la forme $H(P_r, r, P_\theta, \theta)$, soit une fonction des variables de position (r, θ) et des variables de moment (P_r, P_θ) qui leur sont associées. L'espace paramétré par les quatre variables indépendantes $(P_r, r, P_\theta, \theta)$ est appelé *espace des phases*. Par le principe de moindre action, cette fois étendu à l'espace des phases, Hamilton déduit des équations différentielles du premier ordre en les dérivées temporelles, contrairement aux équations de Newton et aux équations de Lagrange qui sont du deuxième ordre. Le nombre de ces équations du premier ordre est le double du nombre d'équations de Lagrange pour le même système physique, autant qu'il y a des variables dans l'espace des phases : $\dot{P}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$ and $\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial P_a}$, où P_a désignent les variables d'impulsion.

Une moitié des équations de Hamilton permet (dans les cas rencontrés en Mécanique des solides) d'exprimer les variables (P_r, P_θ) en termes de vitesses $(\dot{r}, \dot{\theta})$, l'autre moitié produit des équations qui, combinées aux premières, redonnent les équations de Lagrange. Plus explicitement, dans le cas du pendule de Foucault, $H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} - P_\theta \Omega + \frac{m}{2} \omega^2 r^2$, Les équations de Hamilton donnent $P_r = m\dot{r}$, $P_\theta = m r^2 (\dot{\theta} + \Omega)$, ainsi que $\dot{P}_r = -m\omega^2 r + \frac{P_\theta^2}{mr^3}$ et $\dot{P}_\theta = 0$. Elles font donc apparaître une constante du mouvement, à savoir P_θ . Pour le pendule de Sainte-Waudru, cette constante vaut $j = |P_\theta| = m r_0^2 \Omega = 7.15 \cdot 10^{-3} \text{ J s}$ et possède les dimensions d'une action.

[Alice n'avait pas vu le Chenille entrer, trop occupée à méditer sur l'espace des phases. « Je ne le visualise pas » s'exclama-t-elle.] « Qu'entendez-vous par là ? » dit la Chenille d'un ton sévère. « Expliquez-vous. » « Je crains bien de ne pouvoir pas

m'expliquer, » dit Alice, « car, voyez-vous, je ne suis plus moi-même. » « Je ne vois pas du tout, » répondit la Chenille. « J'ai bien peur de ne pouvoir pas dire les choses plus clairement, » répliqua Alice fort poliment. [C'est pourtant simple dit la Chenille qui, expirant la fumée de sa pipe, dessina dans l'air deux courbes élégantes.]

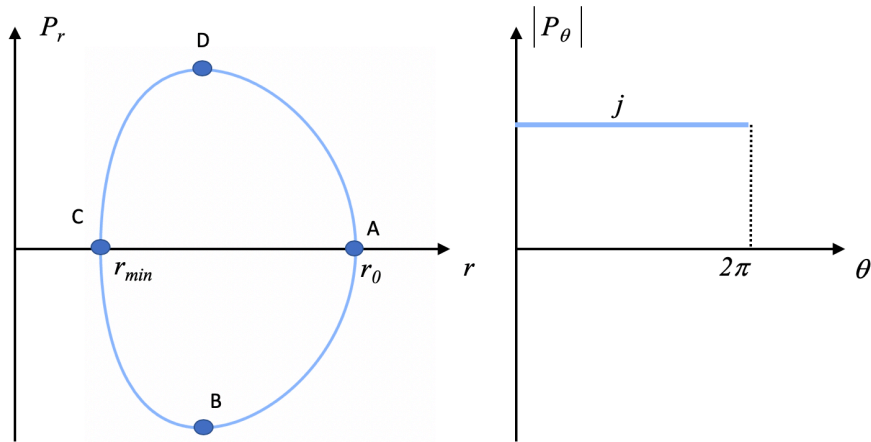


Figure 5. À gauche : Trajectoire du pendule de Foucault dans la section (r, P_r) de l'espace des phases. À droite : Trajectoire du pendule de Foucault dans la section (θ, P_θ) de l'espace des phases.

On peut visualiser la dynamique du pendule via les couples de variables (r, P_r) et (θ, P_θ) , chacun décrivant un plan dans lequel la dynamique va tracer des courbes. L'espace des phases offre une représentation géométrique succincte de l'évolution dynamique du pendule, illustrée dans la Figure 4. Dans le plan (θ, P_θ) , la valeur de P_θ est constante durant l'évolution du système. Parcourons maintenant le cycle d'oscillation du pendule dans le plan (r, P_r) , dans le sens des aiguilles d'une montre au départ du point A. Ce point correspond au sommet de la trajectoire du pendule : l'amplitude du pendule est maximale et sa vitesse est nulle. Ensuite la masse descend, sa vitesse radiale augmente en valeur absolue dans les valeurs négatives de P_r ($P_r < 0$), atteint un maximum en B, et son éloignement par rapport à la verticale diminue jusqu'au point C. Là, le pendule s'éloigne à nouveau de la verticale : r augmente et $P_r > 0$ (avec une valeur maximale en D). Le pendule revient finalement an A d'où il entame un nouveau cycle d'oscillation.

Pourquoi cette apparente complication créée par le dédoublement du nombre de variables entre l'espace des configurations et l'espace des phases, si on retrouve les équations de Lagrange en fin de compte ? La raison est que l'espace des phases possède une structure géométrique remarquable qui autorise des transformations dites *canoniques* préservant la forme des équations du mouvement et mélangeant les variables de types « position » et « impulsion » entre elles, rendant en fait artificielle une telle distinction. Les variables de l'espace des phases peuvent donc se mélanger et donner naissance à des nouvelles variables qui, non seulement préservent la forme simple des équations du mouvement de Hamilton, mais qui en plus offrent immédiatement une résolution de ces mêmes équations du mouvement, ainsi que nous l'expliquons ci-dessous.

6. Promener sur un tore

[Alice, marchant et pensant, était parvenue au château de la Duchesse.] « Encore à réfléchir ? » demanda la Duchesse, avec un nouveau coup de son petit menton pointu. « J'ai bien le droit de réfléchir, » dit Alice sèchement, car elle commençait à se sentir un peu ennuyée.

Pour un mouvement borné tel que celui du pendule de Foucault, une transformation canonique existe qui permet de construire des nouvelles coordonnées au départ de $(P_r, r, P_\theta, \theta)$, à savoir les variables actions-angles $(J_r, \phi_r, J_\theta, \phi_\theta)$. La surprise est que les variables d'action (J_r, J_θ) sont invariantes au cours du temps pour des conditions initiales données. Les calculs montrent que $J_\theta = P_\theta$ et $J_r = \frac{E + \Omega j}{2\omega} - \frac{j}{2}$, soit 20 Js à sainte-Waudru. Ces dernières sont proportionnelles, respectivement, à la surface du rectangle montré

à droite de la Figure 4 et à celle de la courbe montrée à gauche de cette figure. Les variables (ϕ_r, ϕ_θ) varient de 0 à 2π et permettent de situer le système dans le cycle qu'il effectue. Ainsi qu'illustré sur la Figure 6, l'évolution dynamique du pendule dans l'espace des phases peut donc se voir comme le déplacement d'une particule sur un tore - une bouée. Les surfaces des deux sections de la bouée valent J_r et j et les 2 angles qui décrivent la circulation de la particule sur la bouée sont les variables d'angle.

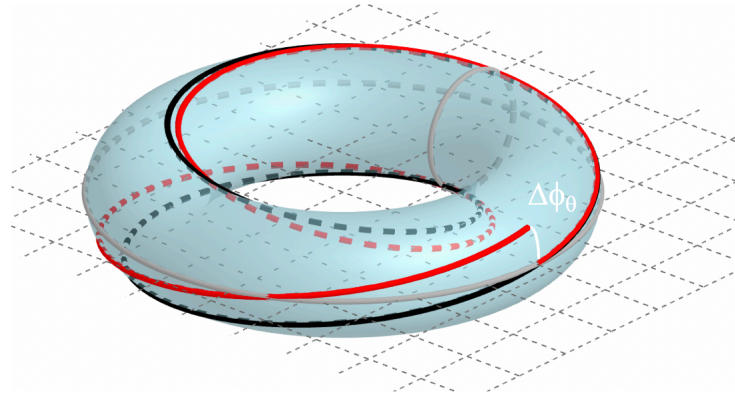


Figure 6 : Représentation de l'espace des phases du pendule de Foucault en termes des variables actions-angles. Les sections du tore (cercles gris) sont de dimensions J_r et j . Les courbes à la surface du tore correspondent à la trajectoire du pendule en négligeant la rotation de la Terre (en noir) ou en incluant celle-ci (en rouge). Un point de la courbe correspond à une valeur du couple (ϕ_r, ϕ_θ) , soient les deux angles nécessaires pour se situer sur le tore. L'angle de Hannay, $\Delta\phi_\theta$, est indiqué également.

La fonction de Hamilton prend alors une forme plus simple : $H(P_r, r, P_\theta, \theta) \rightarrow H'(J_r, \phi_r, J_\theta, \phi_\theta) = \omega (2J_r + j) + \Omega j$. Les équations du mouvement permettent d'obtenir $\phi_\theta = (\omega + \Omega) t$ et $\phi_r = 2\omega t$. En l'absence de rotation de la Terre, donc pour $\Omega = 0$, la variable d'angle ϕ_r augmenterait exactement deux fois plus vite que ϕ_θ : dans la représentation proposée en Figure 6, la trajectoire complète du pendule de Foucault dessinerait une courbe fermée (en noir). Toutefois, le fait que le Terre tourne et donc que la constante Ω est différente de zéro provoque une perturbation dans l'évolution de ϕ_θ : la courbe rouge, qui correspond à la situation réelle, n'est pas fermée. Il y a un décalage entre les courbe rouge et noire. L'écart angulaire qui en découle est appelé « angle de Hannay ». Il vaut $\Delta\phi_\theta = \Omega T = 0.0326^\circ$ et correspond au déplacement angulaire du plan du pendule durant une période.

Plus généralement, pour une dynamique qui se produit dans un volume compact de l'espace des phases, une transformation existe qui permet de voir toute évolution dynamique, dans l'espace des phases, comme le déplacement d'une particule sur un tore de dimension n , si n est le nombre de variables de position indépendantes. Les surfaces des différentes sections de la bouée valent les variables d'action tandis que les n angles qui décrivent la circulation de la particule sur la bouée sont les variables d'angles. En Mécanique contemporaine, cette représentation est abondamment utilisée, en particulier en Mécanique céleste où elle permet de mieux comprendre la stabilité du système solaire. Elle a également servi de base à l'étude des systèmes chaotiques et aux premières approches de la Mécanique quantique.

7. Le pays des variables actions-angles

« Oh ! laissez-moi la paix, » dit la Duchesse, « je n'ai jamais pu souffrir les chiffres. » [Alice] avait alors complètement oublié la Duchesse, et tressaillit en entendant sa voix tout près de son oreille. « Vous pensez à quelque chose, ma chère petite, et cela vous fait oublier de causer. Je ne puis pas vous dire en ce moment quelle est la morale de ce fait, mais je m'en souviendrai tout à l'heure. » « Peut-être n'y en a-t-il pas, » se hasarda de dire Alice. « Bah, bah, mon enfant ! » dit la Duchesse. « Il y a une morale à tout, si seulement on pouvait la trouver. »

Le cheminement que nous avons réalisé dans les différentes formulations de la Mécanique part d'une formulation où l'observable fondamentale est « explicite » : il s'agit de la trajectoire du mobile, $\vec{r}(t)$, ainsi que ses vitesse et accélération, obtenues par dérivations successives de la position. À l'arrivée se trouve une représentation du problème en termes d'invariants du mouvement (les variables d'actions) et de positionnement du mobile sur les différents cycles constituant ce mouvement (les variables d'angles). L'évolution de la Mécanique tend ainsi à l'abstraire des particularismes de chaque problème pour évoluer vers un formalisme général, où tous les systèmes dynamiques présentant un mouvement (quasi)périodique peuvent être caractérisés par des concepts universels.

Le comportement particulier du pendule de Foucault peut également être interprété en termes de transport parallèle du vecteur vitesse. Cette notion est devenue centrale en Physique moderne au travers du concept appelé « connexion » ; ici, la connexion de Levi-Civita sur la sphère, qui exprime comment les vecteurs tangents à celle-ci sont transportés parallèlement à eux-mêmes le long d'un parallèle. Cette même notion de transport parallèle de Levi-Civita est celle qui a permis à Einstein, avec l'aide de Marcel Grossmann (1878-1936), de comprendre la Gravitation. En d'autres termes, les mathématiques de la Relativité générale sont entièrement basées sur la notion de transport parallèle de Levi-Civita sur une variété courbe (une « surface » de dimension 4) qui représente notre espace-temps peuplé de matière et de rayonnement.

Finalement, le formalisme hamiltonien de la Mécanique permet de résoudre complètement de nombreux problèmes insolubles par les autres méthodes, comme le problème d'une particule massive attirée par deux centres (par exemple la Terre soumise à l'attraction gravitationnelle du Soleil et de Jupiter). L'approche de Hamilton est tout aussi importante dans les méthodes approchées de contrôle de position d'un satellite ou d'une sonde spatiale, ou encore pour la compréhension du caractère général du mouvement des systèmes chaotiques. Finalement, c'est elle qui intervient dans la formulation des systèmes quantiques. Or la Nature est quantique à son niveau le plus fondamental, d'où l'importance cruciale de la méthode hamiltonienne pour décrire des particules quantiques en interactions et se déplaçant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, comme c'est le cas des rayons cosmiques qui nous traversent à chaque instant.

Nicolas Boulanger & Fabien Buisseret

« Réveillez-vous, chère Alice ! » lui dit sa sœur. « Quel long somme vous venez de faire ! ». « Oh ! j'ai fait un si drôle de rêve, » dit Alice ; et elle raconta à sa sœur, autant qu'elle put s'en souvenir, toutes les étranges aventures que vous venez de lire (...) Alice se leva donc et s'éloigna en courant, pensant le long du chemin, et avec raison, quel rêve merveilleux elle venait de faire [et quelle merveilleuse science est la mécanique].